

Πολυώνυμο με συντελεστές από κάποιο σώμα K ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad a_i \in K$$

$K[X]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων με συντελεστές από το K
 → πολυωνυμικός δακτύλιος μιας μεταβλητής
 $\mathbb{R}[X] \quad \mathbb{C}[X]$

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \in \mathbb{R}[X]$

↙ αριθμός

$$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m$$

Παραδείγματα:

① Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $f(x) = 3 + x - 2x^2$

Βρείτε τον πίνακα $f(A)$

$$f(A) = 3I_3 + 1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1+2+6 & 2+8+3 & 3+14 \\ 1+4+14 & -2+16+7 & -3+21 \\ 2-1+0 & 4+4+0 & 6+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 9 & 13 & 17 \\ 9 & 21 & 18 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 26 & 34 \\ 18 & 42 & 50 \\ 2 & 16 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 28 & 37 \\ 19 & 35 & 43 \\ 0 & 15 & 29 \end{pmatrix}$$

(2) Given $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ find

$$f(x) = 3 + x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + 3x^{2016} + x^{2017}$$

Prove that $f(B) = 3I_3 + B + 3B^2 + B^3 + 3B^4 + B^5 + 3B^{2016} + B^{2017}$

$$f(B) = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

Induction:

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2016 & 10082017 \\ 0 & 1 & 2016 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2017 & 20171009 \\ 0 & 1 & 2017 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

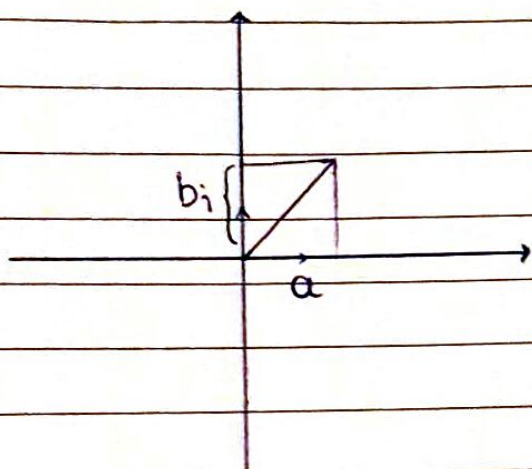
Μικαδικοί Αριθμοί $\mathbb{C}$

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μικαδικών αριθμών

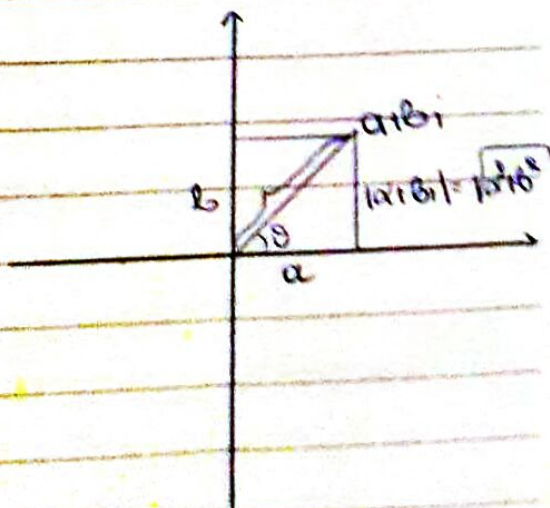
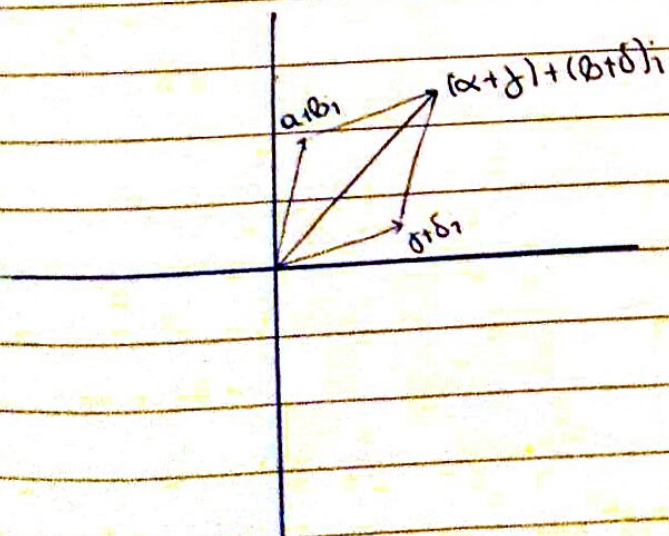
$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
πραγματικός μέρος φανταστικός μέρος

Hamilton : γεωμετρική παράσταση ενός μικαδικού αριθμού



- $(a + bi) + (x + yi) = (a + x) + (b + y)i$
- $(a + bi) - (x + yi) = (a - x) + (b - y)i$
- $(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$ *



$$\eta\mu\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$a+bi = \sqrt{a^2+b^2} \cos \theta + \sqrt{a^2+b^2} \eta \mu \theta$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} (\cos \theta + \eta \mu \theta i)$$

$$(*) \sqrt{a^2+b^2} (\cos \theta + \eta \mu \theta i) \sqrt{c^2+d^2} (\cos \phi + \eta \mu \phi i) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \sqrt{c^2+d^2} (\cos(\theta+\phi) + \eta \mu(\theta+\phi) i)$$

Παραδείγματα:

$$(1) (0+i)(0+i) = -1$$

$$i^2 = -1$$

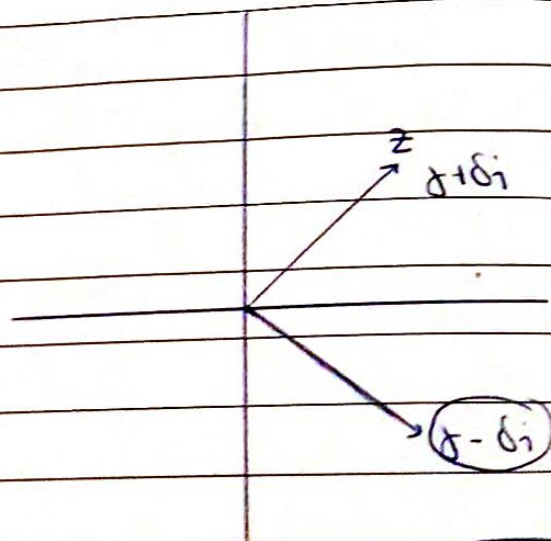
Αντίστροφος

$$z = \gamma + \delta i, z \neq 0+0i$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = \gamma^2 + \delta^2$$

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{\gamma^2 + \delta^2} = 1$$



$$(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i) = \gamma^2 + \delta^2 = (\sqrt{\gamma^2 + \delta^2})^2$$

$$z^{-1} = \frac{\gamma - \delta i}{\gamma^2 + \delta^2} \quad \eta \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Παραδείγματα:

$$(1) (3+4i)^{-1} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3-4i}{25}$$

$$a+bi = (a+bi)(\gamma+\delta i) \quad z(1)=1$$